INTEGRATION, WIRKUNGSPRINZIP

Nach etwas Integrationsrechnung in mehreren Dimensionen betrachten wir das Wirkungsprinzip an einfachen Beispielen.

[H1] *Masse und Schwerpunkt* **[$2+2=4$ Punkte]**

Ein homogener Körper mit Durchmesser $2d$, Höhe h und Massendichte ρ bestehe aus den Punkten (x, y, z) mit

$$\sqrt{x^2+y^2} \leq d\,, \quad \sqrt{x^2+y^2} \leq \frac{z}{a} \leq \frac{h}{a}\,.$$

Bestimmen Sie die Masse $M = \int \mathrm{d}^3x\,\rho$ und den Schwerpunkt $\vec{R} = \frac{1}{M}\int \mathrm{d}^3x\,\rho(\vec{x})\vec{x}$. Verwenden Sie Zylinderkoordinaten.

[H2] *Trägheitstensor* **[4 Punkte]**

Bestimmen Sie die Komponenten des Trägheitstensors

$$\Theta^{ij} = \int \mathrm{d}^3x\,\rho(\vec{x})(\vec{x}^{\,2}\delta^{ij} - x^i x^j)$$

einer homogenen Kugelschale als Funktion der Masse M und des Innen- und Außenradiuses r und R. Warum muss man höchstens 6 Integrale ausführen, obwohl die Indexpaare i, j insgesamt $3 \cdot 3 = 9$ Werte annehmen?

Gegen welchen Wert strebt Θ^{33}, falls die Kugelschale bei unveränderter Masse dünn gemacht wird?

[H3] *Relativistische Bewegung im elektromagnetischen Feld* **[$2+2=4$ Punkte]**

Ein Teilchen mit der Ladung q bewegt sich in einem zeitlich konstanten elektromagnetischen Feld. Die Lagrangefunktion lautet

$$\mathcal{L}(t, \vec{x}, \vec{v}) = -m\sqrt{1-\vec{v}(t)^2} - qV(\vec{x}) + q\vec{v}\cdot\vec{A}(\vec{x})\,.$$

Wie üblich, setzen wir $c = 1$.

(a) Betrachten Sie zunächst den Fall eines freien Teilchens, $V = \vec{A} = 0$. Berechnen Sie Energie und Impuls des Teilchens mit Hilfe der entsprechenden Noether-Ladungen.

(b) Berechnen Sie die Euler-Ableitung und zeigen Sie damit, dass die Bewegungsgleichungen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{m\vec{v}(t)}{\sqrt{1-\vec{v}(t)^2}} = q\left(\vec{E}(\vec{x}) + \vec{v}\times\vec{B}(\vec{x})\right)$$

lauten. Wie hängen offenbar $\vec{E}$, $\vec{B}$ mit V und $\vec{A}$ zusammen?

HINWEIS

Bitte geben Sie auf Ihren abgegebenen Lösungen immer Name, Vorname, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an!